

# 代数学(抄)

藤原松三郎

## 入力にあたって

この文書は藤原松三郎著内田老鶴圃発行「代数学」を読みやすい形で(部分的に)提供するものである。藤原松三郎は1946年に亡くなっており、著作権は死後50年を経過して消滅している。

参照しているのは昭和7年(1932年)2月28日発行の修正第三版である。

以下の方針で入力する:

- 漢字カタカナ交じりを漢字ひらがな交じりにする。
- 漢字は新字体に直すが開かない。
- 仮名は新仮名に直す。
- スタイルはあまり気にせず標準的な $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ の書式にしてしまう。

## 第8章 方程式

### 1 低次方程式

#### 8.1 二次方程式

二次方程式の解法は既にユークリッドの幾何学原本の中に、幾何学の衣をつけて論じてある。然し希臘では負数の概念が知られていなかったから、負根の考は全然ない。之に反して印度では正根負根の区別を認め、二次方程式の二根を定める公式が考えられているが、無論虚根の考は未だ生じなかった。虚根の存在を考えるようになったのは十六世紀の伊太利の数学者カルダノ、ボンペリ等から始まる。

二次方程式

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

を解くには先ず、 $x = y + \lambda$  とおいて、第二項の欠けた二次方程式に移す。このことを一般の方程式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

について行えば、 $f(x) = 0$  は次のようになる。

$$\varphi(y) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots = 0,^1$$

但し  $b_0 = a_0$ ,  $b_1 = na_0\lambda + a_1$ ,  $b_2 = \frac{n(n-1)}{2}a_0\lambda^2 + (n-1)a_1\lambda + a_2, \dots$  故に

$$\lambda = -a_1/na_0$$

とすれば、 $y^{n-1}$  の項はなくなる。

之を二次方程式に施せば次のようになる

$$\varphi(y) = b_0y^2 + b_2 = 0. \quad b_0 = a_0, \quad b_2 = (4a_0a_2 - a_1^2)/4a_0.$$

故に

$$y = \pm \frac{1}{2a_0} \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2},$$

従て

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

が与えられた方程式の根である。

<sup>1</sup>入力者注: 原文では第二項の係数が  $b_1$  ではなく  $b_2$  とある。

8.2 三次方程式<sup>2</sup>

三次方程式

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

に上記の方法を適用すると次のようになる.

$$\varphi(y) = b_0y^3 + b_2y + b_3 = 0.$$

但し

$$b_0 = a_0,$$

$$b_2 = (-a_1^2 + 3a_0a_2)/3a_0,$$

$$b_3 = (2a_1^3 - 9a_0a_1a_2 + 27a_0^2a_3)/27a_0^2.$$

今  $\varphi(y) = 0$  を簡単のために

$$y^3 + ay + b = 0$$

の形に直し,  $y = u + v$  とおけば

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) + b = 0.$$

故に

$$3uv = -a$$

とすれば

$$u^3 + v^3 = -b.$$

従て

$$(u^3 - v^3)^2 = b^2 + \frac{4}{27}a^3 = D$$

となり,  $-27D$  は  $y^3 + ay + b = 0$  の判別式である. (§7.29). 故に  $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{D}$  と  $u^3 + v^3 = -b$  とから

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{D})}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-b - \sqrt{D})}$$

が得られる. 但し  $3uv = -a$  でなければならぬから,  $u$  を一つ定めると,  $v$  が唯一つ定まり, 其値は

$$v = -\frac{a}{3u} = -\frac{a}{3} \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}}$$

<sup>2</sup>原注: 三次方程式は球及びに関する Archimedes の論文の中で初めて現れた. 三次方程式の分類と解法を論じた人にアラビアの Omar Alkayyami があるが, 之は二つの円錐曲線の交点を定める問題に導くためであって, 真の代数的解法は十六世紀の Scipione del Ferro が初めて与えた. Cardano と Tartaglia との間の三次方程式の解法についての論争は Cantor の Geschichte der Math. II, p. 490-494 に詳しく出ている.

である. 故に今  $\varepsilon = (-1 + \sqrt{3}i)/2$  とおけば, 与えられた方程式の三つの根は

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}} - \frac{a}{3} \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}} \\ \varepsilon & \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}} - \frac{\varepsilon^2 a}{3} \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}} \\ \varepsilon^2 & \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}} - \frac{\varepsilon a}{3} \left\{ \frac{1}{2}(-b + \sqrt{D}) \right\}^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

である. 之をカルダノの公式と名づける.

三次方程式の三根が実なる場合には, 判別式  $-27D$  は正である (§7.30). 従てカルダノの公式中の立方根内には必ず複素数が現れる. 実根を求めるのに複素数の仲介によらねばならないという事実は, 一見不可思議に考えられる所であるが, 之はカルダノの方法の欠点ではなく, 其理由はもっと深い所にある. 之を古来既約の場合 (Causus in irreducibilis) と名づけている. 之については第二巻で論ずるであろう.

例題  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , (Bombelli の与えた例).

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{121}i} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{121}i} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i) + (2 - i) = 4 \end{aligned}$$

が一つの根である. 他の根は

$$\varepsilon(2 + i) + \varepsilon^2(2 - i) = -2 - \sqrt{3}, \quad \varepsilon^2(2 + i) + \varepsilon(2 - i) = -2 + \sqrt{3}.$$

### 8.3 四次方程式

四次方程式を初めて解いたのはカルダノの弟子フェラリ (Ferrari) である. 三次方程式のカルダノの解と共に, カルダノの著 *Ars Magna* (1538) で初めて公にされた.

四次方程式

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \quad (1)$$

に於て,  $x = y - a_1/4a_0$  とおけば

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0 \quad (2)$$

の形となる. 之を解くには, 三次方程式のカルダノの方法に倣い

$$2y = u + v + w \quad (3)$$

とにおいて、簡単のために

$$u^2 + v^2 + w^2 = A, \quad v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = B, \quad uvw = C$$

とすれば

$$4y^2 = A + 2(vw + wu + uv),$$

$$16y^4 = A^2 + 4A(vw + wu + uv) + 4B + 8C(u + v + w)$$

となる。これを (2) に代入すれば

$$(A^2 + 4aA + 4B + 16c) + 8(C + b)(u + v + w) + (4A + 8a)(vw + wu + uv) = 0.$$

<sup>3</sup> 故に  $A = -2a$ ,  $C = -b$  となるように  $A, C$  を定めれば

$$A^2 + 4aA + 4B + 16c = 0$$

となり、従て  $B = a^2 - 4c$  になる。之は  $u, v, w$  の平方が三次方程式

$$z^3 - Az^2 + Bz - C^2 = z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

の根であることを示す。この三次方程式を与えられた四次方程式の三次の分解方程式と名づける。之を解けば其根の平方根が  $u, v, w$  である。但し平方根の符号は  $uvw = -b$  によって定める。今  $u_0, v_0, w_0$  を其一組の値とすれば

$$\frac{1}{2}(u_0 + v_0 + w_0), \quad \frac{1}{2}(u_0 - v_0 - w_0), \quad \frac{1}{2}(-u_0 + v_0 - w_0), \quad \frac{1}{2}(-u_0 - v_0 + w_0)$$

が求める四根である。

## 8.4 五次方程式

上記三次四次の方程式の解法を五次方程式に適用すれば失敗に終る。チルンハウス<sup>4</sup> は与えられた五次の方程式を他の、より簡単な形のものに変換して目的を達しようと試みた。

彼の思想は

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

に対して

$$y = F(x) = \lambda_0 + \lambda_1x + \lambda_2x^2 + \cdots + \lambda_{n-1}x^{n-1} \quad (\text{a})$$

なる変換を施し、之を

$$\varphi(y) = y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

<sup>3</sup>入力者注: 原文では第一項が  $(A^2 + 4aA + 4B + 16c)$  ではなく  $(A^2 + 4A + 4B + 16c)$  とある。

<sup>4</sup>原注: Tschirnhaus, Acta Eruditorum, 1683.

の形に直した上,  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  を適当に定めて  $\varphi(y)$  の形を簡単にしようというのである.

今  $f(x) = 0$  の根を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とし, 之に対する  $y$  の値を  $y_1, y_2, \dots, y_n$  とすれば

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= (y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_n) \\ &= (y - F(x_1))(y - F(x_2)) \cdots (y - F(x_n))\end{aligned}$$

である. 之は  $f(x) = 0$  と  $y = F(x)$  との終結式に外ならない. 故に  $y = y_k$  に対して  $f(x) = 0$  と  $y_k = F(x)$  とが唯一次の公約函数を有する場合 (例えば  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  が互に異なる場合) には, 之は  $x - x_k$  であつて,  $x_k$  は  $y_k$  に相当するのである. 且つ  $x - x_k$  を見出す経路は有理演算だけで宜しいから,  $x_k$  は  $y_k, f(x)$  の係数及び  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  の有理函数である. 故に  $\varphi(y) = 0$  を解けば, 其根が互に異なる場合には,  $f(x) = 0$  の根は有理演算で求められる.  $\varphi(y) = 0$  に等根があれば  $f(x) = 0, y_k = F(x)$  の公約函数は一次ではない. 然し其次数が  $n - 1$  を超えないことは勿論である. 故に  $\varphi(y) = 0$  が解けたならば, 高々  $n - 1$  次の方程式を解けば  $f(x) = 0$  が完全に解けることになる.

(a) によって,  $f(x) = 0$  を  $\varphi(y) = 0$  に変換することをチルンハウスの変換と名づける.

今  $b_1 = \sum y_1, b_2 = \sum y_1 y_2, \dots$  であるから, (a) によって  $b_1, b_2, \dots$  は  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  の整函数である. 然かも  $b_k$  は  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  の  $k$  次の同次整函数である. 之等は又  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の対称式であるから, 係数は  $f(x)$  の係数の有理函数になる.

故に  $b_1 = 0, b_2 = 0$  になるように  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots)$  を定めるためには,  $\lambda_0$  を消去すれば  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$  の二次の同次式を 0 に等しとおいた方程式から  $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n$  を定めることになる.  $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$  とするためには  $\lambda_0, \lambda_1$  を消去して  $\lambda_2 : \lambda_3 : \dots$  について六次の方程式を解くことになる.

之を三次方程式の場合に行えば,  $b_1 = b_2 = 0$  とするには二次方程式を解けば宜しい. 此様にして問題は  $y^3 + b_3 = 0$  を解くことに直される. 従て立方根を求めれば三次方程式は完全に解かれる.

四次方程式に於ては,  $b_1 = 0, b_3 = 0$  とするためには三次方程式を解けば宜しい. 従て

$$y^4 + b_2 y^2 + b_4 = 0$$

となるから, 二次方程式を二度解けば宜しい.

然るに五次方程式の場合には,  $b_1 = 0, b_2 = 0$  とするためには  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  の二次方程式を 0 とおいた方程式を解かねばならない. 之は後に示すように (§9.2)  $\varkappa_1 \mu_1^2 + \varkappa_2 \mu_2^2 + \varkappa_3 \mu_3^2 + \varkappa_4 \mu_4^2 = 0$  の形になる.  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  は  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  の一次式である. 故に  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  を  $\sqrt{\varkappa_1 \mu_1} = \sqrt{-\varkappa_2 \mu_2}, \sqrt{\varkappa_3 \mu_3} = \sqrt{-\varkappa_4 \mu_4}$  なるように定めれば  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  の二つ, 例えば  $\lambda_3, \lambda_4$

は残り二つの一次式として表される. 之を  $b_3 = 0$  に入れると  $\lambda_1/\lambda_2$  の三次方程式が得られる. この三次方程式を解けば, 与えられた五次方程式は  $y^5 + cy + c' = 0$  の形になる. 更に  $y = \sqrt[4]{cz}$  とおけば

$$z^5 + z + A = 0, \quad (A = c'/c^{\frac{5}{4}})$$

となる. 然し  $y^5 + b_5 = 0$  の形にするには三次四次の方程式では間に合わない. 此様にしてチルンハウスの当初の目的は失敗に終わったが, 此考は一般の五次方程式をプリング及びジェラードの標準形<sup>5</sup>

$$z^5 + z + A = 0$$

に引直す効果があった. 之は五次方程式の理論に於て重要な結果を与えるものである.

五次以上の方程式を解こうとする試みは, 其後多くの学者によって企てられたが, 何れも成功しなかった. 然るにアーベル<sup>6</sup> に至って初めて次の定理が証明せられ, 此様な企ての徒爾であることが明かになった.

定理 1. 一般の五次方程式は有理演算と開方法とだけでは解くことが出来ない.

茲に一般の五次方程式と特に断ったのは, 係数の間には何等の関係もなく, 凡て互に独立なる変数と考え得られるものを意味する. アーベルの証明によらず, 遙かに一般の定理の結果として之を証明することは, 第二巻中のガロアの理論のところ論ずることにする.

<sup>5</sup>原注: Weber, Algebra I, p. 363 参照.

<sup>6</sup>原注: Abel, Journ. f. Math.1, 1826, Oeuvres complètes, 1881, I, p. 66. (Maser, Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von Abel und Galois, 1889 参照). Wantzel が簡単にした証明は Serret, Algèbre II, p. 512 にある. 之は Abel のもとの論文と共に一寸した点が誤っているが Königsberger が之を正した (Math. Ann. 1, 1869). Kronecker は更に其証明を簡単にした (Berliner Monatsber. 1879). Bauer, Algebra, p. 141–153, 又は藤澤博士の「セミナー演習録」第二冊参照.

## 2 根の存在範囲

### 8.5 根の存在範囲

代数方程式の根は其係数の連続函数である。然し根を係数の函数として具体的に表すことは前節で示したように一般には不可能である。故に以下順次に、(1) 係数を与えた時、其根の存在する範囲の決定、(2) 与えられた範囲内に根が存在する、又はしないの条件、(3) 与えられた範囲内にある根の数の決定等の問題を論じよう。

先ず根の存在する範囲を定めよう。

与えられた  $n$  次の代数方程式を

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

とし、其係数は任意の実数又は複素数であるとする。

§6.14 の証明で、 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$  とすれば、 $f(x) = 0$  の根の絶対値は  $1 + M/|a_0|$  より小なることが示された。吾々は次に、もっと精密な範囲を定めよう。

今  $|x| = \rho$  とおけば

$$|f(x)| \geq |a_0|\rho^n - (|a_1|\rho^{n-1} + |a_2|\rho^{n-2} + \cdots + |a_n|) \quad (1)$$

となる。この右边を  $F(\rho)$  とすれば

$$\frac{F(\rho)}{\rho^n} = |a_0| - \left( \frac{|a_1|}{\rho} + \frac{|a_2|}{\rho^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{\rho^n} \right).$$

この右边は  $\rho$  が非常に小さければ負になり、 $\rho$  が非常に大になれば漸次増大しつつ  $|a_0|$  に近づく。故に  $F(\rho)/\rho^n$  が 0 となる様な  $\rho$  の値は唯一つある。之を  $\rho_0$  とすれば、 $\rho > \rho_0$  ならば  $F(\rho) > 0$  である。従て  $|f(x)| \geq F(\rho) > 0$  となる。即ち  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  を  $f(x) = 0$  の根とすれば

$$|\alpha_k| \leq \rho_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (A)$$

である。

不等式 (1) から出発する以上は、(A) よりも精密な範囲を与えることは不可能である。然し  $\rho_0$  の値を求めることは困難であるから、精密の度を犠牲にして  $|\alpha_k|$  の上界の値を定めることにする。

問題の不等式 (1) の右边

$$F(\rho) = |a_0|\rho^n - (|a_1|\rho^{n-1} + |a_2|\rho^{n-2} + \cdots + |a_n|)$$

が正となる  $\rho$  の値を定めることである。

之がためには

$$|a_0|\rho^n > \lambda_k |a_k| \rho^{n-k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} = 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0 \quad (2)$$

なる  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  及び  $\rho$  を定めれば, 明かに  $F(\rho) > 0$  が成立する.

(2) を成立させる  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を一組定めれば

$$\rho > \sqrt[k]{\lambda_k \left| \frac{a_k}{a_0} \right|}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

なる  $\rho$  に対しては  $|f(x)| \geq F(\rho)$  となる. 故に

$$|\alpha_i| \leq \max \sqrt[k]{\lambda_k \left| \frac{a_k}{a_0} \right|}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (B)$$

今 (2) の代りに

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0, \quad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} < 1 \quad (3)$$

とすれば

$$|\alpha_i| < \max \sqrt[k]{\lambda_k \left| \frac{a_k}{a_0} \right|}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (B1)$$

特に  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = n$  とすれば

$$|\alpha_i| \leq \max \sqrt[k]{n \left| \frac{a_k}{a_0} \right|}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)^7 \quad (C)$$

が得られ,  $\lambda_k = 2^k$  とすれば (B1) から

$$|\alpha_i| \leq 2 \max \sqrt[k]{\left| \frac{a_k}{a_0} \right|} \quad (D)$$

となり, 又  $\frac{1}{\lambda_k} = \binom{n}{k} (\sqrt[n]{2} - 1)^k$  とおけば, (B) から

$$|\alpha_i| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} \max \sqrt[k]{\left| \frac{a_k}{a_0} \right|} / \binom{n}{k} \quad (E)$$

が得られる<sup>8</sup>. 更に

$$\lambda_k = (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) / |a_k|$$

とおけば, (B) によって

$$|\alpha_i| \leq \max \left( \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{|a_0|} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (F)$$

<sup>7</sup>(A), (C) は Cauchy に負う. Exercices de Math. 1829, Oeuvres (2) 9, p. 122.

<sup>8</sup>Jensen, Nyt Tidsskrift 21, 1915; Birkhoff, Bull. American Math. Soc. 21, 1915.

となる. 従て

$$\left. \begin{array}{l} |a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \text{ ならば} \\ |\alpha_i| \leq \left( \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{|a_0|} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ |a_0| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \text{ ならば} \\ |\alpha_i| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{|a_0|} \end{array} \right\} \quad (\text{F1})$$

となる. 更に前者から

$$\left. \begin{array}{l} |a_0| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \text{ ならば } |\alpha_i| < 1, \\ |a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \text{ ならば } |\alpha_i| \leq 1 \end{array} \right\} \quad (\text{F2})$$

(F2) の一部は既に §6.32 で他の方面から証明された.

次に同じく不等式 (1) から出発して,  $F(\rho) > 0$  を

$$|a_0|^2 \rho^{2n} > (|a_1| \rho^{n-1} + |a_2| \rho^{n-2} + \cdots + |a_n|)^2 \quad (4)$$

と変形し, この右辺にコーシーの不等式 (§7.13 例題 1) を適用すれば

$$|a_0|^2 \rho^{2n} > (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)(\rho^{2n-2} + \rho^{2n-4} + \cdots + \rho^2 + 1) \quad (5)$$

なるときは (4) が出て来る. 右辺の第二の因数は之をまとめると  $(\rho^{2n} - 1)/(\rho^2 - 1)$  であって,  $\rho > 1$  ならば  $\rho^{2n}/(\rho^2 - 1)$  より小さい. 故に,  $\rho > 1$  で且つ

$$|a_0| \rho^{2n} \geq \frac{\rho^{2n}}{\rho^2 - 1} (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2),$$

ならば (5), 従て (4), 従て又  $|f(x)| > 0$  が成立する.

最初の不等式は

$$\rho^2 \geq 1 + \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}{|a_0|^2}$$

となるから, 次の関係を得る<sup>9</sup>.

$$|\alpha_i| < \frac{(|a_0|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{|a_0|}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{G})$$

以上に於て根の絶対値の上界が定められたが, 其下界は

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の根が  $f(x) = 0$  の根の逆数なることを利用すれば定められる.

<sup>9</sup>原注: 之は Carmichael-Mason (Bull. American Math. Soc. 21, 1915) が与えた形である.

8.6 掛谷の定理<sup>10</sup>

若し方程式の係数に著しく制限を加え、之を正の実数とすれば、興味ある次の掛谷博士の定理が得られる。

定理 2. 代数方程式  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$  の係数間に

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$$

なる関係あれば、其根  $\alpha$  の絶対値は 1 より小さい。若し

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$$

ならば、根  $\alpha$  の絶対値は 1 より大でない。

$$\begin{aligned} 0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{ならば} \quad |\alpha| > 1 \quad \text{であり,} \\ 0 < a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad \text{ならば} \quad |\alpha| \geq 1 \quad \text{である.} \end{aligned}$$

掛谷博士は之を幾何学的に証明されたが、次の簡単な証明はフルウィッツ<sup>11</sup>が与えたものである。

今  $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$  とすれば

$$(x-1)f(x) = a_0x^{n+1} - (a_0 - a_1)x^n - (a_1 - a_2)x^{n-1} - \cdots - (a_{n-1} - a_n)x - a_n$$

となる。  $|x| = \rho$  とおけば

$$\begin{aligned} |(x-1)f(x)| &\geq a_0\rho^{n+1} - \{(a_0 - a_1)\rho^n + (a_1 - a_2)\rho^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\rho + a_n\} \\ &= (\rho - 1)f(\rho). \end{aligned}$$

但しこの不等式に於て、等号の成立するのは、 $x$  が正なる場合に限る。故に  $x$  が正でなく、 $|x| = \rho > 1$  なるときは

$$|(x-1)f(x)| > (\rho - 1)f(\rho) \geq 0$$

となり、 $x$  が正ならば  $f(x) > 0$  となる。何れにしても  $|x| = \rho \geq 1$  ならば  $|f(x)| > 0$  となる。従て  $f(x) = 0$  の根の絶対値は 1 より小でなければならぬ。

次に  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$  ならば、 $|x| = \rho > 1$  に対し

$$|(x-1)f(x)| \geq (\rho - 1)f(\rho) > 0.$$

従て  $|f(x)| > 0$ 。故に  $f(x) = 0$  の根の絶対値は 1 より大でない。

この簡単な定理から、直ちに次の定理が出て来る。

<sup>10</sup>原注: 掛谷, Tôhoku Math. J. 2, 1912.  $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$  なる時,  $|\alpha|$  は  $a_1/a_0, a_2/a_1, \dots, a_n/a_{n-1}$  中の最大最小の間にあることは既に 1893 に Eneström が証明したが、久しく忘れられていた。Tôhoku Math. J. 17, 1920 に出た Eneström の論文参照。

<sup>11</sup>原注: Hurwitz の証明は Archiv d. Math. (3) 21, 1913, p. 253 の Landau の論文の中にある。Hurwitz, Tôhoku Math. J. 4, 1914 参照。

定理 3.  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  の係数が全て正ならば, 何れの根  $\alpha$  の絶対値も

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

の最大値より大でなく, 最小値より小でない.

之を証明するに, 方程式

$$\varphi(x) = f(rx) = a_0r^n x^n + a_1r^{n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n-1}rx + a_n = 0$$

の係数に於て

$$a_0r^n \geq a_1r^{n-1} \geq \dots \geq a_{n-1}r \geq a_n > 0$$

が成立すれば, 即ち  $r = \max(a_1/a_0, a_2/a_1, \dots, a_n/a_{n-1})$  なるときは,  $\varphi(x) = 0$  の根  $\beta$  に対しては  $|\beta| \leq 1$  である. 従て  $f(x) = 0$  の根  $\alpha = r\beta$  に対しては

$$|\alpha| \leq r = \max\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

が成立する. 同様に

$$0 < a_0r^n \leq a_1r^{n-1} \leq \dots \leq a_{n-1}r \leq a_n,$$

即ち

$$r = \min\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

ならば  $|\beta| \geq 1$ , 従て

$$|\alpha| \geq r = \min\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

之で定理は証明された.

## 8.7 クローネッカーの定理<sup>12</sup>

吾々は次に特殊の方程式に関するものではあるが, 非常に興味のあるクローネッカーの二定理を述べよう.

定理 4.  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  に於て,  $a_0$  は 1 であり, 其他は整数であり, 且つ各根の絶対値は 1 より大でないならば, この方程式の根は凡て 1 の冪根である.

<sup>12</sup>原注: Kronecker, Journ. f. Math. 53, 1857, Werke I, p. 103.

今この方程式の根を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  とすれば、仮定によって  $|\alpha_i| \leq 1$  である。故に

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), & |a_1| &\leq n, \\ a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, & |a_2| &\leq \binom{n}{2}, \\ &\dots & & \\ a_k &= (-1)^k(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_j + \dots), & |a_k| &\leq \binom{n}{k}, \\ &\dots & & \\ a_n &= (-1)^n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n, & |a_n| &\leq 1 \end{aligned}$$

即ち係数の絶対値は凡て一定の値、即ち  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{k}, \dots, \binom{n}{n-1}$  の最大値  $M$  を超えない。然るに仮定より、 $a_1, a_2, \dots, a_n$  は整数であるから、其各の取り得る値は  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$  の  $2M + 1$  個を超えない。故に此様な  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  なる組の数は  $(2M + 1)^n$  を超えない。然るに  $(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$  を根とする方程式

$$f_k(x) = (x - \alpha_1^k)(x - \alpha_2^k) \dots (x - \alpha_n^k) = 0$$

を作れば、 $x^n$  の係数は 1 であって、其他の係数は元の方程式の係数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  の整函数であるから、やはり整数である。従て  $f_k(x) = 0$  は  $k = 1, 2, 3, \dots$  に対し、凡て吾々の今考えつつある方程式に属する。故に凡てが互に異なることはない。今仮に  $f_h(x) = f_k(x)$  であつたとすれば、 $(\alpha_1^h, \alpha_2^h, \dots, \alpha_n^h)$ 、 $(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$  は全体としては相等しくならねばならない。故に  $\alpha_1^h$  は  $(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$  中の或るもの、例えば  $\alpha_2^k$  に等しくなる。この様にして進めば、いつかは  $\alpha_1$  に帰って来る。之を

$$\alpha_1^h = \alpha_2^k, \alpha_2^h = \alpha_3^k, \dots, \alpha_p^h = \alpha_1^k$$

とすれば

$$\alpha_1^{h^2} = \alpha_2^{kh} = \alpha_3^{k^2}, \alpha_1^{h^3} = \alpha_3^{k^2h} = \alpha_4^{k^3}, \dots, \alpha_1^{h^p} = \alpha_1^{k^p}$$

となる。之は  $\alpha_1$  が 1 の或る冪根なることを示している。従て他の凡ての根も亦 1 の或る冪根である。

定理 5.  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  の係数に於て、 $a_0$  は 1 であり、其他は整数である場合に、其根が凡て実数であつて、 $-2 \leq \alpha_i \leq 2$  ならば、 $\alpha_i$  は凡て  $2 \cos \theta_i$  の形を取る。但し  $\theta_i/\pi$  は有理数であるものとする。

之を証明するため

$$\varphi(x) = x^n f\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

とおけば、 $\varphi(x) = 0$  の係数は凡て整数で、特に最高次の項の係数は 1 である。 $f(x) = 0$  の根  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  と  $\varphi(x) = 0$  の根  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  との関係は

$$\beta_k + \frac{1}{\beta_k} = \alpha_k$$

である. 今  $\beta_k = re^{i\theta}$  とすれば

$$\alpha_k = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

となるから, これが実数であって区間  $(-2, 2)$  にあるためには  $r = 1$  なることを要する. 何となれば  $r + \frac{1}{r} - 2 = (r - 1)^2/r \geq 0$  であるから,  $r + \frac{1}{r} \geq 2$ . 但し  $r = 1$  の時の外は  $r + \frac{1}{r} > 2$ , 従て  $\theta = 0$  に対し  $\alpha_k = r + \frac{1}{r} > 2$  となり, 仮定に反する. 故に  $r = 1, |\beta_k| = 1$ , 従て定理 4 により,  $\beta_k$  は凡て 1 の冪根である. 故に  $\beta_k = e^{i\theta_k}$  とおけば  $\theta_k$  は  $\pi$  の有理数倍である. 即ち

$$\alpha_k = \beta_k + \frac{1}{\beta_k} = e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k} = 2\cos\theta_k$$

となり,  $\theta_k/\pi$  は有理数となる.